8 класс

1. На рисунке 1 изображено числовое колесо. В кружочки поставьте первые девять нечётных простых чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, расположенных по диаметру, была простым числом.

а) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 5?

б) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 3?

2. Даны действительные числа a, b, c, причём $a > b > c$. Верно ли, что

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b\,?$$

3. За круглым столом сидят 100 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько лжецов сидит за столом?

4. *а*) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить 36 целых чисел так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 36 чисел — положительной?

б) Можно ли в таблице размером 5×5 расставить 25 целых чисел так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел — положительной?

5. В треугольнике ABC углы A и B равны 30° и 45° соответственно. На биссектрисе угла A вне треугольника ABC отметили точку M такую, что $\angle MBC = 90^\circ$. Найдите угол MCB.

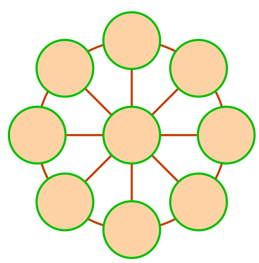


Рис. 1

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. При каком наибольшем натуральном n число $n^3 + 2024$ делится на $n + 1$?

2. Известно, что числа a, b, c отрицательные и $a < b < c$. Расставьте числа $x = (a+b)(b+c)$, $y = (b + c)(c + a)$, $z = (c + a)(a + b)$ в порядке возрастания. Укажите все возможные случаи.

3. Коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ удовлетворяют условию: $p_1p_2 > 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из уравнений имеет два различных действительных корня.

4. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 9 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 меньше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

2. Даны различные действительные числа a и b. Верно ли, что хотя бы одно из уравнений $(x+a)(x+b) = x-a$, $(x-a)(x-b) = x+b$ имеет решение?

3. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 11 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \geqslant 1.$$

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

2. При каком наибольшем натуральном n число $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 100$ делится на $n + 1$?

3. В некотором государстве было решено построить 30 новых городов на 20 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

4. Докажите, что если $(a + c)(a + b + c) < 0$, то

$$(b - c)^2 > 4a(a + b + c).$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AB, угол A равен $60°$. Окружность ω касается гипотенузы AB в точке O и проходит через точку C. Описанная окружность треугольника ABC и катет BC пересекают окружность ω соответственно в точках M и N, отличных от C. Найдите угол между прямыми MN и AB.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

Всероссийская олимпиада школьников по МАТЕМАТИКЕ 2023-24 года

Муниципальный этап
7 класс

Инструкция по выполнению работы

В каждой из предложенных вам задач нужно ***написать правильный ответ****. Ответ может быть числовой, может быть строкой текста или рисунком. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример.* ***Никаких решений задач писать не нужно! Если вы пишете олимпиаду очно, то вы сдаете ТОЛЬКО бланк ответов. Если вы пишете онлайн, то вам нужно ввести ответы в систему. Условия задач можно оставить себе.*** *Пользоваться калькулятором НЕ разрешается*

Максимальное количество баллов — 100.
Время выполнения заданий — 240 минут.

Желаем успеха!

Задания

Задача 1. Вычислите $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$.

Задача 2. Найдите наименьший **целый** корень уравнения $(|x| - 2)(x + 3{,}5) = 0$.

Задача 3. У Максима есть четыре крошечные собачки. Он всеми возможными способами взял две из них, посадил на весы и узнал суммарный вес этих двух собачек. У него получились следующие результаты: 7 кг, 8 кг, 9 кг, 10 кг, 11 кг и 12 кг. Чему равен суммарный вес всех четырех крошечных собачек?

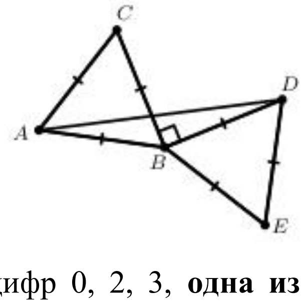
Задача 4. Если бы вчера было воскресенье, то через 96 часов после сегодняшнего полудня был бы день недели, который на самом деле будет послезавтра. Что было позавчера?

Задача 5. В баскетбольном турнире участвуют 32 команды. На каждом этапе команды поделены на группы по 4. В каждой группе каждая команда играет один матч с каждой другой. Лучшие 2 команды из группы проходят в следующий этап, а остальные — выбывают. После последнего этапа две лучшие команды выходят в финал и играют между собой один матч на звание победителя. Сколько всего игр было сыграно в турнире?

Задача 6. В какую степень надо возвести число 4^4, чтобы получить число 16^{16}?

Задача 7. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между цифрами: 1 2 3 4 5 6 7 8 знаки арифметических действий («+», «–», «×», «÷») так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 111. Можно использовать скобки. *В ответ запишите все выражение целиком.*

Задача 8. *ABC* и *BDE* — равносторонние треугольники, *AB=BD*, а угол *CBD* — прямой. Найдите угол *CAD*. *Ответ дайте в градусах.*



Задача 9. Число 2023 состоит из цифр 0, 2, 3, при этом цифра 2 используется дважды. Сколько всего существует **четырехзначных** чисел, состоящих из цифр 0, 2, 3, **одна из которых** используется дважды, а **остальные** — по одному разу?

Задача 10. Вычислите значение выражения

$$1000 + 999 - 998 - 997 + 996 + 995 - 994 - 993 + \ldots + 4 + 3 - 2 - 1$$

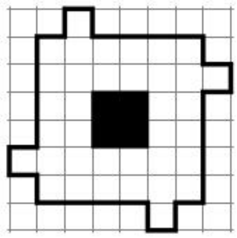
(каждый раз сначала идут два числа с плюсом, а потом два — с минусом).

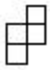
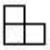
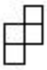
Задача 11. В мешке есть шарики, на каждом из которых написано двузначное число от 10 до 99 (каждое — по одному разу). Какое наименьшее количество шариков нужно достать из мешка не глядя так, чтобы среди них наверняка нашлось число, которое делится на 3 или на 7 (или и на то, и на другое сразу)?

Задача 12. В доме находится 8 человек — лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Три человека сказали: «В комнате нечётное число лжецов», а остальные пять сказали: «В комнате чётное число рыцарей». Сколько рыцарей могло быть в комнате? *Укажите все ответы через запятую, если их больше одного.*

Задача 13. Сколько градусов составляет угол между минутной и часовой стрелками часов в 16:40?

Задача 14. На картинке показана фигура с дыркой в центре.



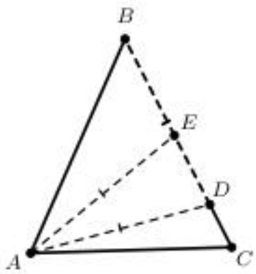
Эту фигуру требуется разрезать без остатка на клетчатые фигурки вида  и  (при этом необязательно использовать оба вида фигурок). Фигурки можно поворачивать и переворачивать, но они не могут накладываться друг на друга и выходить за пределы доски. Какое а) наибольшее и какое б) наименьшее количество фигурок  при этом может быть использовано? *Ответ оформить в виде «а) 20, б) 10».*

Задача 15. Найдите сумму всех целых положительных делителей числа $N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ (включая 1 и само число N).

Задача 16. Булат едет на своем велосипеде из точки A в точку B с постоянной скоростью. Если бы он уменьшил скорость на 3 м/с, то он доехал бы до B в три раза медленнее. Во сколько раз быстрее он доехал бы до B, если бы он вместо этого увеличил скорость на 4,5 м/с?

Задача 17. Про ненулевые числа a, b, c известно, что $a:b = 11:5$, а $b:c = 1:3$. Чему равно $\dfrac{a^2 - b^2}{(b+c)(c-a)}$?

Задача 18. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$). На стороне BC отмечены точки D и E так, что $BD=AD=AE$. Известно, что $\angle DAE = 20^\circ$. Найдите $\angle DAC$. *Картинка приведена только для пояснения, углы на ней не соответствуют условию.*



Задача 19. Известно, что $x + y + z = 6$, а $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x} = \dfrac{15}{19}$. Чему равно $\dfrac{z}{x+y} + \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x}$?

Задача 20. Сколько существует двузначных чисел N, обладающих следующим свойством: спереди и сзади к числу N можно приписать **одну и ту же ненулевую цифру** так, чтобы полученное четырехзначное число делилось на N?